УДК 519.85

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИГЛЯДІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ З ВИКОРИСТАННЯМ ГРАФА ПЕРЕСТАВНОГО МНОГОГРАННИКА

О. О. Ємець, доктор фізико-математичних наук;
Є. М. Ємець, кандидат фізико-математичних наук;
Д. М. Ольховский

Практичні задачі економіки призводять до постійного розвитку економіко-математичного моделювання, методів розв'язування економічних задач, зокрема оптимізаційних комбінаторних задач [1–9]. Серед задач комбінаторної оптимізації окремо виділяють задачі евклідової комбінаторної оптимізації [2–9], зокрема задачі на переставленнях [5–9].

У даній статті введені поняття графа переставного многогранника та часткового графа переставного многогранника, запропоновані методи розв'язування задач комбінаторної оптимізації на переставленнях з застосуванням графа переставного многогранника.

Розглянемо задачу:

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

за комбінаторної умови

$$x = (x_1, \dots, x_k) \in E_{k\nu}(G), \tag{2}$$

та додаткової умови

$$x \in X \subset R^k, \tag{3}$$

де $c_j \in R^1 \ \forall j \in J_k = \{1, 2, \dots, k\}$; $E_{k\nu}(G)$ – множина переставлень з елементів мультимножини $G = \{g_1, \dots, g_k\}$, ν – кількість елементів основи $S(G) = (e_1, \dots, e_\nu)$ – упорядкованої множини різних елементів з G.

При викладенні результатів будемо використовувати відомі факти [5] з теорії комбінаторної оптимізації, зокрема поняття переставного многогранника, критерій суміжності вершин, розв'язок безумовної лінійної задачі оптимізації.

Відомо [11], що граф, вершинами якого є вершини многогранника, а ребрами – його ребра, є 1-скелетом многогранника. Такий граф будемо називати графом многогранника.

Граф многогранника $\Pi_{k\nu}(G)$ назвемо графом переставного многогранника.

Пропонуємо метод відсікання вершин графа переставного многогранника для розв'язування задачі (1)–(3). Алгоритм цього методу полягає в поступовому аналізі вершин графа переставного многогранника. У ході аналізу вершин відбувається поетапний перехід між вершинами графа по його ребрах.

Пропонуємо реалізацію методу, при якій обчислення проводяться не на графі переставного многогранника, а з використанням часткового графа множини переставлень.

Введемо поняття «граф множини переставлень»:

$$\Gamma_\Pi = \langle E_{k\nu}, M \rangle,$$

де $E_{k\nu}$ – множина всіх переставлень з різних елементів $g_1, g_2, \dots, g_k$, M – множина ребер графа Γ_Π. Граф множини переставлень, на відміну від графа многогранника переставлень, має іншу множину ребер.

Частковим графом множини переставлень будемо називати граф $\Gamma_P = \langle P_k, S \rangle$, де $P_k \subseteq E_{k\nu}$, S – множина ребер графу Γ_P.

Використання графу $Г_P$ у процесі розв'язування задачі дозволяє включати в граф і аналізувати не всі вершини й ребра графу многогранника переставлень, а додавати (та пізніше видаляти) їх до часткового графу множини переставлень поступово.

Викладемо основну ідею алгоритму запропонованого методу, яка полягає в наступному:

1. Задамо початкові дані задачі, а саме: елементи множини переставлень, коефіцієнти лінійної цільової функції, додаткові лінійні обмеження.

2. Розв'яжемо безумовну задачу лінійної оптимізації (1)–(2). Так, отримаємо початкову вершину для подальшого процесу розв'язування задачі, яку додаємо до множини вершин часткового графа множини переставлень, яка на початку є порожньою.

3. Щоб отримати наступну вершину розв'язку, до поточної вершини часткового графа множини переставлень додають суміжні з нею вершини (згідно з критерієм суміжності вершин), а також ребра, що пов'язують ці вершини з поточною. Серед цих суміжних вершин обирають вершину з максимальним значенням цільової функції. Ця вершина буде наступною вершиною для аналізу у процесі розв'язування.

4. При переході по суміжним вершинам часткового графа множини переставлень відбувається видалення проаналізованих вершин з множини вершин графа. Всі вершини, що були суміжні з нею, при видаленні проаналізованої вершини з'єднуються ребрами.

5. Робота алгоритму продовжуються поки не буде знайдено вершину, що задовольняє всі обмеження задачі – це оптимальний розв'язок задачі, або не будуть проаналізовані всі вершини графа переставного многогранника і буде встановлений факт нерозв'язності задачі.

Іншим підходом є аналіз вершин часткового графа переставного многогранника, при якому відбувається поетапний перехід між вершинами графа переставного многогранника. При цьому не відбувається додавання нових ребер у графі, натомість при розв'язуванні ми використовуємо тільки кістяк графа.

Загальна ідея алгоритму запропонованого методу полягає в такому:

1. Задаються початкові дані задачі, а саме: елементи множини переставлень, коефіцієнти лінійної цільової функції, додаткові лінійні обмеження та точність обчислень.

2. Розв'язуємо безумовну задачу лінійної оптимізації (1)–(2). Так отримаємо початкову вершину x_{max} для подальшого процесу розв'язування задачі, яку додаємо до множини вершин часткового графа множини переставлень, яка на початку є порожньою.

3. Випадковим чином обираємо допустиму вершину x_{rnd} (або декілька – у випадку реалізації для багатопроцесорної системи) в графі переставного многогранника, яка задовольняє умови (2)–(3).

4. У ході роботи алгоритму відбувається поступовий перехід до наступних вершин розв'язку від вершин x_{max} (у напрямку мінімізації цільової функції) та x_{rnd} (у напрямку максимізації цільової функції) до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної точності обчислення задачі ε або не буде отримано точний розв'язок задачі, або досягнутий інший критерій зупинки (досягнута максимальна кількість вершин графа часткового графа множини переставлень, досягнуто максимальний час обчислень).

5. Щоб отримати наступну вершину розв'язку, до поточної вершини часткового графа множини переставлень додаємо суміжні з нею вершини (згідно з критерієм суміжності вершин), а також ребра, що пов'язують ці вершини з поточною. Серед цих суміжних вершин обираємо вершину з максимальним або мінімальним (для точок x_{max} та x_{rnd} відповідно) значенням цільової функції. Ця вершина буде наступною вершиною для аналізу в процесі розв'язування.

6. При переході по суміжних вершинах часткового графа множини переставлень відбувається видалення проаналізованих вершин з множини вершин графа, а також ребер, інцидентних з ними (з множини ребер графа).

Робота алгоритму продовжує доти не буде отримано вершину-розв'язок з заданою точністю, що задовольняє всі обмеження задачі, або не будуть проаналізовані всі вершини графа переставного многогранника і буде встановлений факт нерозв'язності задачі.

Було визначено обчислювальну складність алгоритму запропонованого методу: $T = O(k^4 + nk^2)$. З урахуванням кількості ітерацій обчислювальна складність алгоритму буде рівна: $T = K \cdot O(k^4 + nk^2) = O(Kk^4 + Knk^2)$.

Отже, результати, отримані у даній статті, дозволяють проводити ефективне розв'язування економічних задач оптимізації з використанням графа переставного многогранника та графа множини переставлень. Запропонований метод відсікання вершин графа переставного многогранника та наближений поліноміальний метод аналізу графа переставного многогранника для умовних лінійних задач комбінаторної оптимізації на переставленнях, дозволяє отримати розв'язок задачі з точністю до функціоналу.

Як напрям подальших досліджень доцільно провести числові експерименти з розв'язуванням задачі (1)–(3).

ЛІТЕРАТУРА

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. – К. : Наук. думка, 1981. – 288 с.
2. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения и исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наук. думка, 2003. – 260 с.
3. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев – К. : Наук. думка, 1986. – 266 с.
4. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
5. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
6. Емец О. А. Об одном методе отсечений для задач комбинаторной оптимизации / Олег Алексеевич Емец // Экономика и матеатические методы. – 1997. – Т. 33, вып. 4. – С. 120–129.
7. Ємець О. О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задач евклідової комбінаторної оптимізації / О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доп. НАН України. – 2000. – № 9. – С. 105–109.
8. Емец О. А. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках / О. А. Емец, Е. М. Емец // Экономика и математические методы. – 2001. – Т. 37. – С. 118–121.
9. Емец О. А. Модификация метода комбинаторного отсечения в задачах оптимизации на вершинно расположенных множествах / О. А. Емец, Е. М. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 5. – С. 129–136.
10. Емец О. А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании : учеб. пособие / Олег Алексеевич Емец. – К. : УМК ВО, 1992. – 92 с.
11. Емеличев В. А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. – М. : Наука, 1981. – 342 с.

УДК 005:658

ПОТЕНЦІАЛ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПІДПРИЄМСТВОМ: СУТНІСТЬ І СКЛАДОВІ ЕЛЕМЕНТИ

Н. Г. Калюжна, кандидат економічних наук

Потенціал системи управління є передумовою реалізації всіх видів можливостей в ієрархічній структурі потенціалу підприємства. Його пріоритетна роль обумовлюється тим, що саме від системи управління, її якості та конкурентоспроможності, залежить вирі-